Etude d'une équation fonctionnelle

Thèmes abordés : Equation différentielles, fonctions continues.

L'objectif du problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\ .$$

Partie I

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \text{ch}\, x$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. Soit f dans $\mathcal{E}$.
   Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.
3. Soit f dans $\mathcal{E}$.
   En donnant à x et y des valeurs particulières, prouver que :

3.a $f(0)$ vaut 0 ou 1.

3.b Si $f(0)=0$ alors f est la fonction identiquement nulle.

3.c Si $f(0)=1$ alors f est une fonction paire.

Partie II

Dans cette partie, on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.
On introduit f une telle fonction.

1. Etablir que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$.
2. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+\mu y=0$ en séparant les cas $\mu>0$, $\mu<0$ et $\mu=0$.
4. Déterminer les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.

Partie III

Dans cette partie, on oublie l'hypothèse de dérivabilité et on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent tout en n'étant pas identiquement nulle. On introduit f une telle fonction.

1. Montrer que $f(0)=1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On forme $E=\{x>0 / f(x)=0\}$.

2.a Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

2.b Prouver que $f(a)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que $a>0$.

2.c Montrer que : $\forall x \in [0,a[, f(x)>0$.

3. On pose $\omega=\dfrac{\pi}{2a}$ et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(\omega x)$.

3.a Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)+1=2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

3.b En déduire, en raisonnant par récurrence sur q que : $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

3.c Démontrer aussi que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

3.d Etendre cette propriété à tout $p \in \mathbb{Z}$.

4. On forme $D_a = \left\{ \frac{pa}{2^q} / \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

4.a Etablir que tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

4.b En déduire que $f = g$.

Correction

d'après Mines sup 2000 (spécialité)

Partie I

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et par développement :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$.
La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est continue et :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $2\frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{y-x}}{2}$
ce qui donne : $2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$.
Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. f_α est continue par opérations sur les fonctions continues.
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$.
La fonction f_α appartient à $\mathcal{E}$.

3.a Pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0)(1 - f(0)) = 0$ puis $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

3.b Supposons $f(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ donc $f = 0$.

3.c Supposons $f(0) = 1$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Pour $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$ donc $f(-y) = f(y)$ et f est paire.

Partie II

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
En dérivant la relation par rapport à y, on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$.
En dérivant à nouveau par rapport à y, on obtient : $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.

2. Posons $\lambda = f''(0)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, la relation ci-dessus donne $2f''(x) = 2f''(0)f(x)$ i.e. $f''(x) = \lambda f(x)$.

3. $y'' + \mu y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + \mu = 0$.
Si $\mu > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes : $i\sqrt{-\mu}$ et $-i\sqrt{-\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$.
Si $\mu < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu}x)$.
Si $\mu = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double : 0.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 x + C_2$.

4. Soit f un élément de $\mathcal{E}$ deux fois dérivable.
f peut être la fonction nulle.
Si f n'est pas la fonction nulle alors f est une fonction paire, vérifiant l'équation $f(0) = 1$ et solution d'une équation différentielle du type $y'' + \mu y = 0$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $\mu > 0$, on obtient $f(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$ avec $C_1 = C_2$ (par parité) et $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ (par la relation $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = \text{ch}(\sqrt{\mu}x)$.

Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha = \sqrt{\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.

Dans le cas $\mu < 0$, on obtient $f(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu}x)$ avec $C_2 = 0$ (par parité) et $C_1 = 1$ (par la relation $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = \cos(\sqrt{-\mu}x)$.

Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha = \sqrt{-\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.

Dans le cas $\mu = 0$, on obtient $f(x) = C_1 x + C_2$ avec $C_1 = 0$ (par parité) et $C_2 = 1$ (par $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = 1$. Inversement cette fonction est solution.

Résumons, les fonctions deux fois dérivables solutions sont :
$f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto 1$, $f : x \mapsto \cos(\alpha x)$ (avec $\alpha > 0$) et $f : x \mapsto \text{ch}(\alpha x)$ (avec $\alpha > 0$).

Partie III

1. I.3.b implique par contraposition $f(0) \neq 0$, I.3.a donne alors $f(0) = 1$ et I.3.c donne f paire.
Puisque f s'annule au moins une fois, que ce n'est pas en 0 et qu'elle est paire, on peut assurer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+ *$.

2.a E est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (via III.1) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure a.

2.b (1) Par l'absurde, supposons $f(a) \neq 0$.
Par continuité en a, il existe un voisinage de a, de la forme $[a-\alpha, a+\alpha]$ (avec $\alpha > 0$) sur lequel f ne s'annule pas. Par suite E étant minorée par a, l'est aussi par $a+\alpha$. Or a est le plus grand des minorants de E. Absurde.
(2) En exploitant la réalisation séquentielle d'une borne inférieure.
Il existe $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$. Puisque f est continue $f(x_n) \to f(a)$.
Or $x_n \in E$ donc $f(x_n) = 0$ puis par unicité de la limite $f(a) = 0$.
$a = \inf E$, $E \subset \mathbb{R}^+ *$ donc $a \in \mathbb{R}^+$ or $f(a) = 0$ et $f(0) = 1$ donc $a > 0$.

2.c De part la définition de a, on a $\forall x \in]0, a[$, $f(x) \neq 0$. De plus, on sait $f(0) = 1$.
Si par l'absurde, $\exists y \in [0, a[$ tel que $f(y) \leq 0$ alors en appliquant le TVI entre 0 et y, on peut affirmer que f s'annule entre 0 et y. Cela contredit la propriété : $\forall x \in]0, a[$, $f(x) \neq 0$. Absurde.

3.a Exploitons la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ avec $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$.
On obtient $f\left(2\frac{a}{2^{q+1}}\right) + 1 = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ puis la relation voulue.

3.b Par récurrence que $q \in \mathbb{N}$.
Pour $q = 0$: $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0 = g(a)$.
Supposons la propriété établie au rang $q \in \mathbb{N}$.
On a $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ et $f\left(\frac{a}{2^q}\right) \underset{HR}{=} g\left(\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right)$ donc
$\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} + 1\right) = \cos^2\frac{\pi}{2^{q+2}}$ en vertu de $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.
Sachant $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ et $\cos\frac{\pi}{2^{q+2}} > 0$ on a $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \cos\frac{\pi}{2^{q+2}} = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.
Récurrence établie.

3.c Par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$, montrons que $\forall q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$

Pour $p = 0$, $f(0) = 1 = g(0)$.

Pour $p = 1$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ en vertu de III.3b

Supposons la propriété vraie aux rangs p et $p-1$ avec $p \geq 1$.
En exploitant la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$
avec $x = \frac{pa}{2^q}$ et $y = \frac{a}{2^q}$ on obtient : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) + f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

Par HR : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$.

Or $2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2\cos\frac{p\pi}{2^{q+1}}\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} - \cos\frac{(p-1)\pi}{2^{q+1}} = \cos\frac{(p+1)\pi}{2^{q+1}} = g\left(\frac{(p+1)a}{2^{q+1}}\right)$
via la formule $2\cos x\cos y - \cos(x-y) = \cos(x+y)$.

Ainsi $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

Récurrence (double) établie.

3.d Par parité de f et g, on peut étendre la propriété à $p \in \mathbb{Z}$.

4.a Soit $x \in \mathbb{R}$ .Posons $u_n = \frac{E\left(2^n x/a\right)a}{2^n}$. On a $u_n \in D_a$ et puisque $\frac{2^n x}{a} - 1 \leq E\left(\frac{2^n x}{a}\right) \leq \frac{2^n x}{a}$ on a aussi

$x - \frac{a}{2^n} \leq u_n \leq x$. Par le théorème des gendarmes : $u_n \to x$.

4.b Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'éléments de D_a telle que $u_n \to x$.
Puisque f et g sont continues et que $u_n \to x$ on a $f(u_n) \to f(x)$ et $g(u_n) \to g(x)$.
Or, par III.3d, on a $f(u_n) = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc à la limite $f(x) = g(x)$.
Finalement $f = g$.